ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА

УДК 621.311

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ В СЛОЖНЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.Ю. Шашкин
г. Челябинск, ЮУрГУ

MATHEMATICAL MODELING OF FLUID FLOWS IN COMPLEX MULTICHANNEL SYSTEMS

V.J. Shashkin
Chelyabinsk, SUSU

Приводится модель расчета течения среды в сложной многоканальной системе последовательно-параллельных каналов произвольной заданной структуры с автоматизированным отображением структуры системы, которая может быть использована для моделирования процессов в энергетических установках.

Ключевые слова: *математическое моделирование, течение, каналы, система, автоматизированное отображение.*

The article contains solution model of fluid flows in complex multichannel system of series-parallel channels of custom structure with automated system structure plotting, which can be used for processes modeling in power installations.

Keywords: *mathematical modeling, flow, channels, system, automated plotting.*

Вследствие многообразия возможных структур сложных многоканальных систем энергетических установок представляется актуальным разработка методов, моделей и алгоритмов анализа течения среды в системе каналов с автоматизированным отображением структуры системы. Реализация подобного подхода в виде прикладной программы позволяет создать универсальный инструмент анализа течений теплоносителей в системах каналов произвольной заданной структуры.

Для расчета течения среды по сложным многоканальным системам разработана модель расчета стационарного состояния многоканальной системы последовательно-параллельных каналов произвольной заданной структуры с автоматизированным отображением структуры системы. Реализованный подход более прост по сравнению с существующими методами моделирования и анализа процессов в сложных тепло-гидродинамических системах, но при этом позволяет эффективно исследовать многоканальные системы.

Примем, что элементами системы могут быть каналы, местные сопротивления и узлы соединения каналов.

Система одномерных уравнений неразрывности, сохранения количества движения и энергии, описывающих течение теплоносителя в канале [1]:

$$\frac{d\dot{m}}{dx} = 0 , \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(P + \frac{\dot{m}^2}{\rho F^2}\right) = -\frac{\tau_w \Pi_w}{F} , \tag{2}$$

$$\frac{d\dot{m}i}{dx} = q_w \Pi_w , \tag{3}$$

где $\dot{m}$ – массовый расход рабочего тела по каналу, кг/с;

P – давление рабочего тела по каналу, Па;

i – энтальпия рабочего тела по каналу, Дж/кг;

ρ – плотность рабочего тела по каналу, кг/м^3;

F – площадь поперечного сечения канала, м^2;

Π_w – периметр, м;

τ_w – касательное напряжение трения на стенке;

q_w – тепловой поток из стенки к рабочему телу Вт/(м^2·К).

Система уравнений (1) – (3) дополняется замыкающими зависимостями по теплообмену, трению и теплофизическим свойствам:

$$q_w = \alpha\left(T_w - T\right),\ \tau_w = \xi\frac{\dot{m}^2}{\rho F^2}, \qquad \alpha = \alpha\left(P, \dot{m}, i\right),\ \rho = \rho\left(P,\ i\right), \tag{4}$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К);

T_w – температура стенки, К;

T – температура рабочего тела, К;

ξ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Для узла соединения каналов будем иметь соотношения, соответствующие закону сохранения массы (5), энергии (6), условию равенства давлений в узле и равенства энтальпий (7) на входе каналов, образующих узел, через которые происходит отвод теплоносителя:

$$\sum \dot{m}_j\left(x_j = L_j\right) - \sum \dot{m}_i\left(x_i = 0\right) = 0\,, \tag{5}$$

$$\sum \dot{m}_j\left(x_j = L_j\right) i_j\left(x_j = L_j\right) - \\ -\sum \dot{m}_i\left(x_i = 0\right) i_i\left(x_i = 0\right) = 0\,, \tag{6}$$

$$P_j\left(x_j = L_j\right) = P_i\left(x_i = 0\right) = idem,\ \ i_i\left(x_i = 0\right) = idem, \tag{7}$$

где индексы j – подводящий канал, i – отводящий канал.

Для местных сопротивлений считается, что их гидросопротивление зависит от расхода, давления и энтальпии в начальных сечениях, закон сопротивления принят квадратичным, на местном гидросопротивлении реализуется изоэнтальпийный процесс дросселирования, т.е. энтальпия потока до и после местного сопротивления неизменна, а температура изменяется ввиду падения давления. Без ущерба для общности будем считать, что местное сопротивление типа дроссельной шайбы является простым узлом, соединяющим j-й подводящий и i-й отводящий каналы. Уравнения, описывающие процессы на дроссельной шайбе, имеют следующий вид:

$$\dot{m}_j\left(x_j = L_j\right) = \dot{m}_i\left(x_i = 0\right),$$

$$i_j\left(x_j = L_j\right) = i_i\left(x_i = 0\right),$$

$$P_j\left(x_j = L_j\right) - P_i\left(x_i = 0\right) = \Delta P_{\text{м}}\left(P_j, \dot{m}_j, i_j\right). \tag{8}$$

Для описания взаимодействия системы с окружающей средой требуется задание краевых условий на входе и выходе системы, т.е. для тех точек, где газ поступает в систему и выходит из нее (подводящие и отводящие устройства).

Для входного сечения n-го подводящего канала будем иметь:

$$P_{\text{вх}} = \text{const}\,,\ i_{\text{вх}} = \text{const}\,, \\ P_{\text{вх}} - P_n\left(x_n = 0\right) = \Delta P_{\text{вх}}\left(P_n, \dot{m}_n, i_n\right). \tag{9}$$

В свою очередь, для k-го отводящего канала:

$$P_{\text{вых}} = \text{const},\ P_k\left(x_k = L_k\right) - P_{\text{вых}} = \Delta P_{\text{вых}}\left(P_k, \dot{m}_k, i_k\right), \tag{10}$$

Соотношения типа (9), (10) должны быть записаны для всех подводящих и отводящих магистралей, которых может быть в общем случае несколько.

Гидравлические характеристики местных и концевых сопротивлений примем квадратичными:

$$\Delta P = K\frac{\dot{m}^2}{\rho F^2}\,, \tag{11}$$

где K – коэффициент потерь.

Представленные уравнения и соотношения, записанные для каждого элемента системы, образуют замкнутую модель стационарного состояния системы.

Модель стационарного режима системы представляет собой нелинейную краевую задачу. Для ее решения необходимо построить сходящийся итерационный вычислительный процесс.

Применяя к уравнениям (1) – (3) процедуру квазилинеаризации [2] и дополняя их релаксационными членами [3], получаем:

$$\frac{P^{n+1} - P^n}{t} + \frac{d\dot{m}^{n+1}}{dx} = 0\,, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\dot{m}^{n+1} - \dot{m}^n}{t} + \frac{dP^{n+1}}{dx}\right)\left(1 - \frac{\dot{m}^2}{\rho F^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)^n + \\ &+\left(\frac{dP}{dx}\frac{2\dot{m}}{\rho F^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)^n\left(\dot{m}^n - \dot{m}^{n+1}\right) = \\ &=\left(\frac{1}{\rho F^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial i}\right)^n q_w \Pi_w \dot{m}^{n+1} - \\ &-\left(\frac{\xi\Pi_w}{8\rho F^3}\right)^n\left(2\dot{m}^n\dot{m}^{n+1} - \dot{m}^{n2}\right)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{i^{n+1} - i^n}{t} + \dot{m}^n\frac{di^{n+1}}{dx} + \dot{m}^{n+1}\frac{di^n}{dx} = \dot{m}^n\frac{di^n}{dx} + q_w\Pi_w, \tag{14}$$

где n – номер итерации; t – релаксационный параметр.

Для автоматизированного построения модели стационарного режима введем вектор состояния Y,

$$Y = \left|P_1^{n+1}, \ldots, P_N^{n+1}, \dot{m}_1^{n+1}, \ldots, \dot{m}_N^{n+1}, i_1^{n+1}, \ldots, i_N^{n+1}\right|^T\,, \tag{15}$$

где N – число каналов в системе.

Тогда совокупность уравнений (12)–(14) может быть записана в следующей матричной форме:

$$\frac{dY}{dx} = \Theta Y + \Phi\,, \tag{16}$$

где матрица Θ размером $3N\times3N$ и вектор Φ строятся из коэффициентов уравнений (12)–(14).

Таким образом, в Θ и Φ входят параметры только с n-й итерации, следовательно, система уравнений (16) является линейной относительно компонент вектора Y.

Линеаризация краевых условий дает следующие соотношения:

– для узла соединения каналов:

$$\begin{aligned} &\sum \dot{m}_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) - \sum \dot{m}_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) = 0\,, \\ &\sum \dot{m}_j^n\, i_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) + \sum \dot{m}_j^{n+1}\, i_j^n\left(x_j = L_j\right) - \\ &-\sum \dot{m}_i^n\, i_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) - \sum \dot{m}_i^{n+1}\, i_i^n\left(x_i = 0\right) = \\ &= \sum \dot{m}_j^n\, i_j^n\left(x_j = L_j\right) - \sum \dot{m}_i^n\, i_i^n\left(x_i = 0\right), \end{aligned} \tag{17}$$

$$P_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) = P_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) = idem,$$

$$i_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) = idem;$$

– для местного сопротивления:

$$\dot{m}_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) = \dot{m}_i^{n+1}\left(x_i = 0\right),$$

$$i_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) = i_i^{n+1}\left(x_i = 0\right), \qquad (18)$$

$$P_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) - P_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) -$$

$$-\left(\frac{2K\dot{m}_j}{\rho F_j^2}\right)\Bigg|^n_{x_j = L_j} \dot{m}_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) = -\left(\frac{K\dot{m}_j^2}{\rho F_j^2}\right)\Bigg|^n_{x_j = L_j};$$

– для входного подводящего канала:

$$i_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) = i_{\text{вх}},$$

$$P_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) + \left(\frac{2K\dot{m}_i}{\rho F_i^2}\right)\Bigg|^n_{x_i = 0} \dot{m}_i^{n+1}\left(x_i = 0\right) =$$

$$= P_{\text{вх}} + \left(\frac{K\dot{m}_i^2}{\rho F_i^2}\right)\Bigg|^n_{x_i = 0}; \qquad (19)$$

– для выходного отводящего канала:

$$P_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) - \left(\frac{2K\dot{m}_j}{\rho F_j^2}\right)\Bigg|^n_{x_j = L_j} \dot{m}_j^{n+1}\left(x_j = L_j\right) =$$

$$= P_{\text{вых}} - \left(\frac{K\dot{m}_j^2}{\rho F_j^2}\right)\Bigg|^n_{x_j = L_j}. \qquad (20)$$

Таким образом, после линеаризации совокупность краевых условий для циркуляционной многоканальной системы, состоящей из указанных выше элементов, может быть представлена в следующей матричной форме:

$$B^n Y^{n+1}\left(x_i = 0\right) + C^n Y^{n+1}\left(x_i = L_i\right) = D^n, \qquad (21)$$

где B и C – матрицы размерностью $3N \times 3N$, а D – вектор-столбец, содержащий $3N$ элементов. Матрицы B, C, D формируются на основе соотношений (17)–(20) с учетом конкретной заданной структуры системы, стационарное состояние которой требуется определить.

Решение краевой задачи (16), (21) до достижения сходимости итерационного процесса даст искомый набор параметров (давление, массовый расход, энтальпия) стационарного состояния системы. Данное решение получено на основе метода прогонки (сведения к задаче Коши).

Матрицы B, C, D содержат всю информацию о структуре системы. Таким образом, автоматизированное построение вычислительной модели стационарного состояния сводится к формированию указанных матриц по специальному алгоритму.

Алгоритм формирования матриц B, C, D состоит в следующем. Каждое из соотношений (17) – (20) можно представить в матричной форме:

$$\tilde{B}_j Y^{n+1}\left(x_i = 0\right) + \tilde{C}_j Y^{n+1}\left(x_i = L_i\right) = \tilde{D}_j, \qquad (22)$$

где j – номер узла системы. Каждая из матриц $\tilde{B}_j$, $\tilde{C}_j$ имеет $3N$ столбцов и M строк. Вектор $\tilde{D}_j$ имеет M строк, где M – число краевых условий, порождаемых данным элементом. Формирование этих матриц производится в соответствии со структурой соотношений (17)–(20).

Заполнение матриц B, C, D из (21) производится по блочному принципу подобно схеме:

$$B = \begin{vmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\tilde{B}_j} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\tilde{B}_k} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \boxed{\tilde{C}_1} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\tilde{C}_j} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\tilde{C}_k} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \boxed{\tilde{D}_1} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\tilde{D}_j} \\ \cdots\cdots \\ \boxed{\tilde{D}_k} \end{vmatrix},$$

где k – число узлов в системе.

Для реализации метода прогонки задача (16), (21) сведена к задаче:

$$\frac{dY}{dx} = AY, \qquad (23)$$

$$B^n Y^{n+1}\left(x_i = 0\right) + C^n Y^{n+1}\left(x_i = L_i\right) = D^n.$$

Для этого вектор $Y = \left|P_1^{n+1},\ldots,P_N^{n+1},\dot{m}_1^{n+1},\ldots,\dot{m}_N^{n+1},i_1^{n+1},\ldots,i_N^{n+1}\right|^T$ дополняется еще одной компонентой y_{3N+1}, система дифференциальных уравнений (16) – уравнением $\frac{dy_{N+1}}{dx} = 0$, матрица A – нулевой строкой, столбцом Φ и элементом $a_{3N+1,\,3N+1} = 0$, а краевые условия дополняются условием $y_{3N+1}(x_{3N+1} = 0) = 1$.

Методом прогонки (сведением к задаче Коши) находится решение краевой задачи (23).

Разработан алгоритм, на основе которого создана прикладная программа, позволяющая определять параметры (величину массового расхода, энтальпию среды в каналах, направление ее течения, давление в каналах) стационарного состояния системы каналов произвольной заданной структуры и оперативно исследовать как всю систему в целом, так и отдельные ее подсистемы.

Разработаны схемы моделирования течения теплоносителя по сложной многоканальной системе (порядок нумерации каналов и узлов многоканальной системы). При этом количество каналов, входящих в систему, может превышать 1000, а схема их соединения быть любой сложности.

Модель может использоваться для расчета и анализа энергетической эффективности поверхностей нагрева при сложной многоканальной схеме течения теплоносителя, например, насадки регенеративного теплообменного аппарата, а также для моделирования процессов в пористом теле.

Литература

1. Гликман, Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем / Б.Ф. Гликман. – М.: Наука, 1986. – 366 с.

2. Беллман, Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М.: Мир, 1968. – 183 с.

3. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.

Поступила в редакцию 28.09.2009 г.

Шашкин Владимир Юрьевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры промышленной теплоэнергетики Южно-Уральского государственного университета, г. Челябинск. Область научных интересов – высокотемпературные энергетические установки. Контактный телефон: 8 (351) 267-94-22.

Shashkin Vladimir Jurjevich. Candidate of technical sciences, associate professor of the Industrial Heat Power Engineering department of South Ural State University, Chelyabinsk. Professional interests – high-temperature power installations. Contact telephone: 007(351) 267-94-22.