

СВЯЗЬ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦЕПЕЙ СО СПЕКТРОМ МАТРИЦ ОДНОРОДНОГО БАЗИСА

М.И. Грамм
г. Челябинск, ЮУрГУ

Спектр собственных чисел матриц состояния цепей в однородном базисе может служить основой для оптимизации параметров подключения одной сложной цепи к другой. Наличие современных стандартных компьютерных программ расчёта собственных векторов и чисел делает предлагаемые простые теоремы наиболее производительной основой для расчёта параметров оптимальной передачи мощностей.

Предложенные в [1] методы согласования сложных цепей на уровне спектрального расщепления матриц однородного базиса оптимизируют передачу суммарной мощности через сечение S (рис.1) сопряжения двух цепей – генератора с матрично-векторными параметрами $EG - RG$ и нагрузки с параметрами $EL - RL$. Ниже показано, что в дополнение к этому общему решению спектральная основа позволяет также оценить диапазон скалярных величин входных сопротивлений и реально достижимых мощностей в сечении сопряжения для любой заданной нерасщеплённой схемы. В известной литературе, касающейся таких оценок ([2], [3] и др.), спектральные характеристики матриц не использовались. Основа для таких оценок описана далее в форме несложных теорем для линейных или линеаризованных цепей.

Известно, что матрицы систем уравнений состояния цепей в однородном базисе практически всегда являются положительно определёнными [4]. Это означает, что они могут служить основой для квадратичного функционала F , равного мощности PR потерь [5]. Решение для конкретного состояния цепи в базисе контурных токов (рис. 1) или в базисе узловых потенциалов (рис. 2) всегда соответствует минимуму функционала и минимуму электрических потерь в цепи. Например, как для связной, так и для несвязной цепей по рис. 2 потери могут быть записаны с помощью матрицы G проводимостей цепи и вектора φ потенциалов в виде разницы двух скалярных произведений – мощности

PR и удвоенной мощности PJ источников:

$$F = PR - 2 \cdot PJ = \varphi^T \cdot G \cdot \varphi - 2 \cdot \varphi^T \cdot J. \tag{1}$$

В частном случае, когда вектор токов J оказался одним из собственных векторов $V^{(k)}$ матрицы G ($k = 1, 2, \dots, n$) при соответствующем её собственном числе λ_k , система $G \varphi = J$ из n уравнений для потенциалов φ становится набором из n скалярных строк $\lambda_k \varphi = J = V^{(k)}$. Такое состояние цепи в [6] было предложено, по примеру теоретической физики, называть базисным.

Сформулируем фундаментальное положение в этой связи.

Теорема 1. Цепь может иметь столько базисных состояний, какова размерность описания её состояний в однородном базисе.

Утверждение следует из сказанного выше о положительной определённости матриц $n \times n$ систем уравнений в однородном базисе (то есть, положительности всех λ_k , являющихся проводимостями $g_{0k} = \lambda_k$ несвязной цепи рис. 2). Такие матрицы обладают полным набором из n собственных взаимортогональных векторов и допускают построение функционала (1), свидетельствующего о реализуемости базисного состояния цепи.

Состояния, отличные от базисных (когда вектор J воздействия на цепь образован $m > 1$ собственными векторами системы) как и в физике, логично называть комбинационными, поскольку их всегда можно представить как линейные комбина-

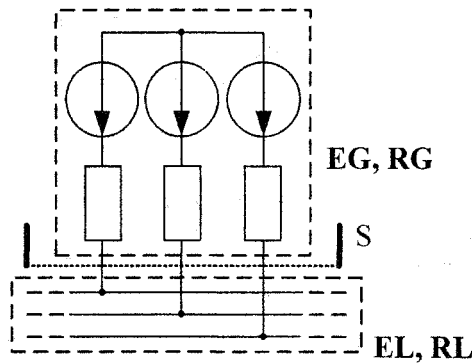


Рис. 1. Пример связи сложных цепей

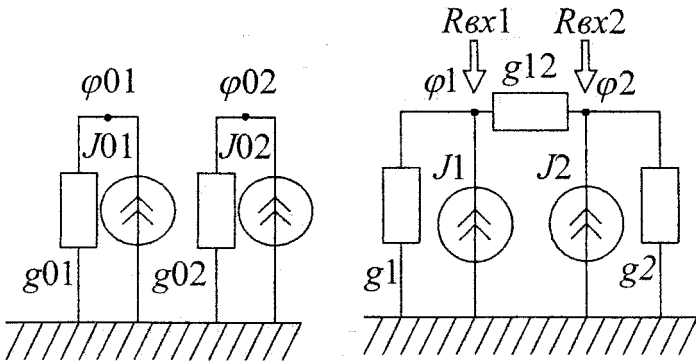


Рис. 2. Преобразование несвязной цепи в связную

ции базисных. Комбинационные состояния, в свою очередь, структурируют на m -мерные ($m < n$) комбинационные и полные или общие, содержащие все n собственных векторов матрицы системы.

Существуют примеры фактически интуитивно применяемых в расчётах электротехники базисных состояний (расчёты симметричных трёхфазных цепей со скалярными сопротивлениями для многопроводной шины, приведение параметров машин к осям p - q и т.п.).

Любая связная цепь, для которой осуществимо описание состояния в однородном базисе, принадлежит к группе (то есть, к множеству, для объектов которого выполнимы преобразования «туда и обратно»). Описание состояния цепи такой группы суть то или иное ортогональное преобразование некоторого общего для группы описания исходной системы из независимых уравнений для несвязной «порождающей» цепи (рис.2). Столбцы $V^{(k)}$ ортогональной матрицы T ($k = 1, 2, \dots, n$) перехода $G = T \cdot G_0 \cdot T^T$ от матрицы G_0 несвязной цепи к матрице G связной оказываются собственными векторами G [7]. Матрицы T , таким образом, предопределяют как базисные состояния связных цепей группы, так и возможные комбинационные.

В частности, для цепи $n=2$ по рис.2 матрица T обязательно окажется матрицей плоского вращения и задаваемый ею тот или иной угол поворота определит направления полуосей эллипса $\varphi^T G \varphi = \text{const}$ состояний φ с одной и той же мощностью PR потерь. Учтя то, что полуоси такого эллипса всегда направлены по собственным векторам $V^{(k)}$ матрицы G , можем установить положения точек $A1$ и $A2$ двух возможных базисных состояний цепи $n=2$ (рис. 3). Например, состояние $A1$ соответствует меньшему $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ из двух собственных чисел (длины полуосей обратно пропор-

циональны квадратному корню из собственных чисел).

Плавнo следуя по эллипсу $PR = \text{const}$, мы перебираем состояния цепи с одной и той же величиной выделяемой в цепи мощности, но с разными суммами квадратов потенциалов узлов, поскольку расстояние $(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{0.5}$ от точек до центра эллипса не остаётся при этом постоянным. Легко заметить, что упомянутой выше точке $A1$ соответствует наименьшее отношение $PR / (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$, а точке $A2$ – наибольшее. Эти минимаксные свойства известны в линейной алгебре и резюмированы на случай матриц любой размерности в теореме о так называемом отношении Релея [4]: величина отношения $R(\varphi) = \varphi^T G \varphi / \varphi^T \varphi = \lambda_1$ минимальна и равна наименьшему собственному числу $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ тогда, когда вектор φ является собственным вектором матрицы при наименьшем собственном значении $\lambda_{\min}$ матрицы G ; величина $R(\varphi)$ максимальна и равна наибольшему $\lambda_n = \lambda_{\max}$ тогда, когда вектор φ является собственным вектором матрицы при наибольшем её собственном числе. Учтя это, легко преобразовать всё сказанное в следующее весьма полезное утверждение для цепей.

Теорема 2. При питании цепи от источников тока, вектор которых создаёт на узлах цепи произвольный вектор $|\varphi| = \text{const}$ потенциалов неизменной длины, подаваемая источниками в цепь суммарная мощность P максимальна $P = P_{\max}$ в базисном состоянии, соответствующем наибольшему собственному числу $\lambda_{\max}$ матрицы проводимостей, и минимальна $P = P_{\min}$ в базисном состоянии, соответствующем наименьшему собственному числу $\lambda_{\min}$. В любых других базисных или смешанных

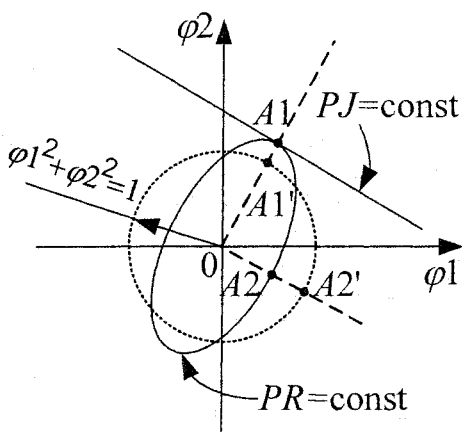


Рис. 3. Точки базисных состояний

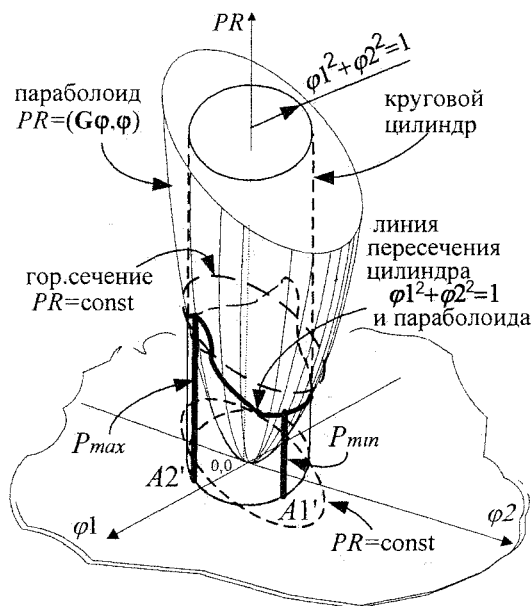


Рис. 4. Параболоид виртуальных потерь и цилиндр

состояниях при том же значении $\varphi = \text{const}$ величина P мощности находится в диапазоне между величинами $P_{\max} > P > P_{\min}$.

При обращении к порождающей несвязной цепи утверждение теоремы 2 легко доказывается аналитически. В самом деле, при $n=2$ (рис.2) и, например, при единичной сумме потенциалов несвязной цепи $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ справедливо выражение:

$$P = \varphi_1^2 \cdot g_1 + (1 - \varphi_1^2) \cdot g_2. \quad (2)$$

Первая и вторая производные P по φ_1 соответственно равны:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\varphi_1} &= 2 \cdot \varphi_1 \cdot g_1 - 2 \cdot \varphi_1 \cdot g_2 = 0; \\ \frac{d^2 P}{d\varphi_1^2} &= g_1 - g_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует, что при $\varphi_1=0$ мощность экстремальна и этим экстремумом при $g_1 > g_2$ является минимум – реализовано базисное состояние при наименьшем собственном числе g_2 . При $g_1 < g_2$ и $\varphi_1=0$ экстремумом будет максимум мощности. Отметим, что в этих рассуждениях подразумевается обоснованная в [1] идентичность свойств мощности (функционала F) цепей одной группы.

Ещё более просто понять утверждаемое в теореме 2 при обращении к рис.4, изображающему в трёхмерном пространстве (φ_1, φ_2, P) взаимопересечение поверхности созданных в цепи потенциалов (цилиндр $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$) с поверхностью эллиптического параболоида виртуальных потерь $\varphi^T G \varphi$ набора резисторов цепи, сечением которого и является эллипс.

Пересечение кругового цилиндра $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1 = \text{const}$ с эллиптическим параболоидом $PR = \varphi^T G \varphi$ виртуальных потерь образует замкнутую траекторию (рис. 4 и рис. 3; точки $A1'$ и $A2'$ находятся на образующей цилиндра). Точка максимальной высоты $P_{\max}$ этой траектории обязательно находится на меньшей полуоси, совпадающей с собственным вектором для наибольшего собственного числа. Соответственно, точка минимальной высоты $P_{\min}$ находится на векторе наименьшего собственного числа. Из рис. 4 ясно, что траектория пересечения цилиндра с параболоидом потерь не может иметь ординат более $P_{\max}$ и менее $P_{\min}$. Мощностям внутри этого диапазона соответствуют либо базисные состояния при промежуточных между наибольшим и наименьшим собственными числами системы (при $n > 2$) однородного базиса, либо комбинационные состояния цепи.

С описанными свойствами базисных состояний цепи непосредственно связано ещё одно весьма полезное положение. Сформулируем его.

Теорема 3. При питании цепи от источников тока, произвольный вектор которых имеет постоянную длину $|J| = \text{const}$, подаваемая в цепь источ-

никами тока суммарная мощность P максимальна $P = P_{\max}$ в базисном состоянии, соответствующем наименьшему собственному числу матрицы проводимостей, и минимальна $P = P_{\min}$ в базисном состоянии, соответствующем наибольшему собственному числу. В любых других состояниях при этом же значении $|J| = \text{const}$ величина мощности находится в диапазоне между этими величинами $P_{\max} > P > P_{\min}$.

Доказательство этого утверждения для $n=2$ аналогично выкладкам (2)-(3):

$$P = \frac{J_1^2}{g_1} + \frac{1 - J_1^2}{g_2}, \quad (4)$$

$$\frac{dP}{dJ_1} = \frac{2 \cdot J_1}{g_1} - \frac{2 \cdot J_1}{g_2} = 0,$$

$$\frac{d^2 P}{dJ_1^2} = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2}. \quad (5)$$

Вернёмся к траектории пересечения цилиндра $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$ с эллиптическим параболоидом $PR = \varphi^T G \varphi$ виртуальных потерь (рис. 4). В числе множества состояний цепи, которым соответствуют точки траектории при $|\varphi|^2 = \text{const}$, находятся и точки, когда ненулевым является только один из токов источников. Такой источник J_s ($1 \leq s \leq n$) создаёт на s -м узле потенциал φ_s , прямо пропорциональный входному сопротивлению R_{exs} цепи со стороны данного узла $\varphi_s = J_s \cdot R_{\text{exs}}$. При этом мощность $P_s = \varphi_s^2 / R_{\text{exs}}$, вводимая в цепь через этот узел, равна суммарной мощности потерь и должна, по сказанному выше, находиться в диапазоне величин между $P = P_{\min}$ и $P = P_{\max}$ при $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \text{const}$. То есть, должно быть выполнено неравенство, пределы которого заданы базисными состояниями при $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ и при $\lambda_n = \lambda_{\max}$ из чисел матрицы G :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2}{R_{\text{exmax}}} = \lambda_{\min} \leq \frac{\varphi_s^2}{R_{\text{exs}}} = \frac{1}{R_{\text{exs}}} \leq \lambda_{\max}. \\ \frac{\varphi_s^2}{R_{\text{exs}}} = \frac{1}{R_{\text{exs}}} \leq \lambda_{\max} = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2}{R_{\text{exmin}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Неравенствам (6) соответствует следующее утверждение.

Теорема 4. Входная проводимость со стороны любого узла цепи с матрицей проводимостей G не может быть больше наибольшего собственного числа и меньше наименьшего собственного числа этой матрицы. Равенство входных проводимостей наименьшему или наибольшему собственному числу матрицы G достигается только тогда, когда матрица G является диагональной и соответствует несвязной цепи.

Для контурного базиса теорема 4, очевидно, определяет диапазон входных сопротивлений контуров, для набора которых записана матрица R контурных сопротивлений цепи.

Отметим, что утверждение о переходе неравенства (6) в равенство в теореме 4 основано на том, что матрица несвязной цепи имеет в качестве набора собственных векторов столбцы единичной матрицы. Последняя в этом случае формально и является матрицей T . Питание несвязной цепи от единственного ненулевого источника суть то или иное её базисное состояние.

При оптимизации передачи мощности важную роль играют такие величины, как входные сопротивления цепи. Спектральный подход даёт величину суммы входных сопротивлений цепи со стороны её узлов. Найдём её, ограничившись для простоты фрагментом $n=2$ цепи по рис. 2. Применим произвольную ортогональную матрицу T со столбцами V_1 и V_2 для преобразования диагональной матрицы G_0 проводимостей несвязного фрагмента $n=2$:

$$T \cdot G_0 \cdot T^T = G, \\ G = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{01} & 0 \\ 0 & g_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T. \quad (7)$$

Преобразование (7) даст матрицу G проводимостей связной цепи. Наличие собственных векторов V_1 и V_2 позволяет построить проекторы $P_1 = V_1 \cdot V_1^T$ и $P_2 = V_2 \cdot V_2^T$ и с их помощью записать обращение матрицы G в спектральной форме:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T \cdot \frac{1}{g_{01}} + \\ + \begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 & V_1 \end{bmatrix}^T \cdot \frac{1}{g_{02}}. \quad (8)$$

Матрицу G^{-1} в форме (8) удобно использовать для расчётов входных сопротивлений цепи. Входное сопротивление R_{ex1} или R_{ex2} со стороны узла равно потенциалу при подаче на него единичного тока в отсутствие других источников. С помощью (8) умножим соответствующие векторы источников $J_1^T = [1 \ 0]$ и $J_2^T = [0 \ 1]$ на G^{-1} и просуммируем затем полученные величины входных сопротивлений R_{ex1} и R_{ex2} . Они равны:

$$[G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}]_1 + [G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}]_2 = \frac{1}{g_{01}} + \frac{1}{g_{02}}. \quad (9)$$

Поскольку при получении (9) мы не оговаривали свойств V_1 и V_2 помимо их взаимортогональности, то (9) доказывает инвариантность суммы входных сопротивлений при ортогональных преобразованиях и справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Сумма входных сопротивлений цепи со стороны её узлов инвариантна относительно ортогональных преобразований матрицы проводимостей и равна сумме обратных величин проводимостей порождающих цепей – сумме обратных величин собственных чисел матрицы проводимостей.

Аналогичное утверждение справедливо для суммы входных проводимостей контуров относительно контурных эдс при ортогональных преобразованиях матрицы контурных сопротивлений.

Отметим, что для несвязной цепи равенство суммы проводимостей резисторов сумме обратных величин входных сопротивлений цепи очевидно. С другой стороны, эта сумма проводимостей равна следу диагональной матрицы несвязной цепи, который, как известно ([1] и др.), инвариантен относительно ортогональных преобразований. Отметим также, что теорема 5, кроме задач согласования, может оказаться полезной и при экспериментальном определении собственных чисел произвольной цепи.

На практике абстрактная возможность для цепи с n узлами или n контурами находиться в том или ином базисном состоянии означает питание от n -мерного источника. Последнее в случае сложной цепи представляется весьма экзотическим случаем. Однако все приведённые выше утверждения при наличии в цепи M источников при $M < n$, можно отнести к многополюснику, эквивалентному по M входам заданной n -мерной цепи и полученному преобразованиями цепи к M зажимам источников. Матрицы GA или RA размером $M \times M$, описывающие в этом случае узловые проводимости или контурные сопротивления такого многополюсника, назовём актуальными или эквивалентными матрицами цепи. Хотя для эквивалентного приведения уравнений состояния к размерности $M < n$ можно пользоваться любым методом, проще всего это выполнить шагами прямого хода метода Гаусса, выполняя их как умножения на элементарные N -матрицы [1].

Литература

1. Грамм, М.И. Ортогональные преобразования и многомерное согласование/ М.И. Грамм// *Электричество*. – 2004. – №8.
2. Пенфилд, П. Энергетическая теория электрических цепей/ П. Пенфилд, Р. Спенс, С. Дюинкер. – М.: Энергия, 1974.
3. Бутырин, П.А. Диагностика электрических цепей по частям/ П.А. Бутырин, Т.А. Васьковская. – М.: МЭИ, 2003.
4. Икрамов, Х.Д. Численные методы для симметричных систем/ Х.Д. Икрамов. – М.: Наука, 1988.
5. Грамм, М.И. О принципе минимума потерь/ М.И. Грамм// *Изв. вузов. – Электромеханика*. – 1989. – №10.
6. Грамм, М.И. Практические методы численных расчётов для электротехники и электрофизики/ М.И. Грамм. – Челябинск.: ЧГТУ, 1994.
7. Грамм, М.И. Множество цепей с постоянной мгновенной мощностью и экстремальные принципы для цепей/ М.И. Грамм// *Электричество*. – 2003. – №4.

Грамм Михаил Израилевич – доцент кафедры ТОЭ ЮУрГУ

Область профессиональных интересов – теоретические основы электротехники.