

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ НАРУЖНЫХ СЕТЕЙ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

А.М. Петров¹, darker2012@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3265-520X>
А.Н. Попов^{2,3}, 264241@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0774-411X>

¹ Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского, Норильск, Россия

² Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

³ Государственный аграрный университет Северного Зауралья, Тюмень, Россия

Аннотация. Коллективом авторов отмечается, что проектирование современных систем теплоснабжения 4-го поколения заключается в применении современных цифровых технологий с использованием анализа и обработки больших данных и в том числе при прогнозировании поведения системы теплоснабжения в целом. Поэтому разработка цифровых моделей является одной из актуальных проблем в современном теплоснабжении.

Материалом исследования научной работы являются термодинамические процессы многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения. Приводится описание и расчет методики построения физико-математических моделей термодинамических процессов многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения с использованием метода Рунге – Кутты/WENO.

Отмечается, что математически возможно выразить термодинамические процессы как непрерывные процессы, представления о которых можно получить с помощью осреднения параметров фаз рассматриваемого потока. Прежде всего свойство непрерывности свидетельствует, что малые изменения аргумента приводят к малым изменениям значения функции. Поток можно считать гетерогенным, а значит, обладающим явлением межфазного взаимодействия. Следовательно, такие взаимодействия необходимо учитывать при составлении уравнений.

Результаты. Проведенные расчеты позволяют сделать вывод, что предложенная система является удобной, для построения вычислительного алгоритма на основе методов Рунге – Кутты/WENO в сочетании с модификациями TVD-схем и WENO-схем. В процессе расчета авторы анализируют сложности, возникающие при моделировании межфазного взаимодействия, принимают необходимость учитывать ряд требований для их разрешения, а именно: гиперболичность систем уравнений, согласованность получаемой физико-математической модели с необходимыми законами и другие.

Выводы. Предложенная методика позволяет, математически представить многофазный поток в виде подходящего потока данных с однородным фоном, в перспективе удобным для обработки с помощью информационных технологий.

Ключевые слова: системы теплоснабжения, измерительно-вычислительный комплекс, физико-математическая модель, нейронная сеть, многофазный поток, метод Рунге – Кутты

Для цитирования: Петров А.М., Попов А.Н. Разработка методики построения физико-математических моделей термодинамических процессов многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». 2024. Т. 24, № 2. С. 69–78. DOI: 10.14529/power240207

Original article
DOI: 10.14529/power240207

THERMODYNAMIC PHYSICAL-MATHEMATICAL MODELS OF MULTI-PHASE FLOWS OF EXTERNAL HEAT SUPPLY NETWORKS

A.M. Petrov¹, darker2012@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3265-520X>
A.N. Popov^{2,3}, 264241@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0774-411X>

¹ Fedorovsky Polar State University, Norilsk, Russia

² University of Tyumen, Tyumen, Russia

³ Northern Trans-Ural State Agricultural University, Tyumen, Russia

Abstract. The design of 4th generation heat supply systems involves the use of advanced digital technologies, including the analysis and processing of big data to predict the behavior of the heat supply system as a whole. Therefore, the development of digital models is an issue in modern heat supply studies.

© Петров А.М., Попов А.Н., 2024

This study investigates the thermodynamic processes of multiphase flows in external heat supply networks. A description and calculation methodology for constructing thermodynamic physical-mathematical models of multiphase flows in external heat supply networks using the Runge–Kutta/WENO method is provided.

It is mathematically possible to express these thermodynamic processes as continuous. These representations can be obtained by averaging the parameters of the phases of the flow. Continuity implies that small changes in the argument lead to small changes in the value of the function. However, from a physical point of view, the flow can be considered heterogeneous, and thus, include interphase interactions which need to be taken into account when formulating the equations.

Results. The proposed system can build a computational algorithm based on the Runge–Kutta/WENO methods in combination with modifications of the TVD and WENO schemes. In the calculation, the authors analyze the difficulties that arise in modeling interphase interactions, acknowledging the need to take into account the hyperbolicity of the system of equations, the consistency of the physical-mathematical model with the necessary laws, and others.

Conclusions. The methodology allows for the mathematical representation of multiphase flow as an incoming data flow with a homogeneous background.

Keywords: heat supply systems, measurement and computing complex, physical-mathematical model, neural network, multiphase flow, Runge–Kutta method

For citation: Petrov A.M., Popov A.N. Thermodynamic physical-mathematical models of multi-phase flows of external heat supply networks. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering.* 2024;24(2):69–78. (In Russ.) DOI: 10.14529/power240207

Введение

Развитие и модернизация старых объектов внутри муниципальных образований, а также строительство новых формируют потребности создания систем теплоснабжения иного уровня и качества относительно проектируемых и создаваемых в настоящее время.

Современные системы центрального теплоснабжения как модернизированные, так и создаваемые вновь, не всегда обеспечивают необходимое качественное теплоснабжение для конечных потребителей и зачастую не поддерживают высокий уровень надежности.

Развитие цифровых технологий и активное внедрение технологии «больших данных» позволяют научному сообществу активно искать качественные и высокотехнологичные прорывные решения для развития данной отрасли.

Для более глубокого понимания и прогнозирования происходящего внутри трубопровода системы централизованного теплоснабжения необходимо наличие модели, учитывающей большинство параметров такой системы. При этом модель должна обладать необходимыми физическими свойствами потока.

Термодинамические процессы многофазного потока в «разрезе» при создании такой физико-математической модели рассматривают прежде всего перемещения рабочего тела, обладающего различными термодинамическими параметрами и формами течения в одну единицу времени внутри трубопровода.

Актуальность. Разработка подобной физико-математической модели и методика ее создания являются одной из актуальнейших проблем для современного теплоснабжения. Ключевые новейшие элементы для создания, проектирования и реализации систем централизованного теплоснабжения 4-го поколения [1] заключаются в использовании цифровых технологий, обработке боль-

ших данных и прогнозировании поведения рабочего тела в частности и самой системы теплоснабжения в целом. Чем сложнее для обработки компьютером будет физико-математическая модель, тем больше потребуется его ресурсов производительности и тем медленнее будет формироваться итоговый результат (отчет, прогноз, анализ и т. д.) [1–10].

Научная новизна. Для формирования концепции нового поколения измерительно-вычислительных комплексов диагностирования сетей теплоснабжения нужна упрощенная для вычисления, но при этом наиболее точная физико-математическая модель термодинамических процессов многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения. В данной работе рассмотрены особенности моделирования однотрубных систем теплоснабжения с рабочим телом в виде технической воды, с возможностью возникновения многофазных потоков. Представлено нововведение в существующие TVD-схемы и WENO-схемы в виде описания представления математического движения многофазного потока с учетом непрерывности производных.

Материалы и методы исследований

В настоящее время существует множество типов многофазных потоков [11]. Разработку физико-математической модели необходимо начинать с поиска общего для всех подобных потоков параметра, а именно – давления. Ввиду того, что рассматривается многофазный поток и его термодинамические процессы внутри системы теплоснабжения, необходимо учитывать то, что давление внутри системы строго регламентировано технической документацией. Это дает возможность использования неявного, экономичного алгоритма численного интегрирования системы уравнения для описания многофазного потока, отображенного в исследовании [12]. Необходимо отметить, что

физико-математическая модель разрабатывается под особенности системы теплоснабжения города Норильска, в котором техническая вода для горячего водоснабжения не проходит процедуру полного цикла очистки, а значит, при рабочем режиме существует многофазность рабочего тела.

Использование подобного алгоритма будет эффективно, поскольку он описывает пространство некоей объемной доли жидкости, элементы которой находятся в различных состояниях:

$$\frac{\partial(Aa_k \rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial(Aa_k \rho_k u_k^2 + Aa_k p)}{\partial x} - p \frac{\partial(Aa_k)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где a_k – объемная доля жидкости, %; ρ_k – плотность жидкости, кг/м³; u_k – скорость жидкости, м/с; k – общее количество жидкости; p – общее давление в трубопроводе, Па; A – площадь сечения трубопровода, м²; t – время, с; x – координата вдоль образующего канала, м.

Подобная формула математически корректно описывает вышеуказанное определение многофазного потока [13]. Однако ее необходимо дополнить математическим описанием термодинамических процессов, происходящих в момент его перемещения внутри трубопровода.

Результаты исследования и выводы

Термодинамические процессы можно выразить математически как непрерывные процессы, представления о которых можно получить с помощью осреднения параметров фаз рассматриваемого потока [14], поскольку свойство непрерывности свидетельствует, что малые изменения аргумента приводят к малым изменениям значения функции. Однако необходимо отметить, что рассматриваемый поток прежде всего гетерогенен, а значит, обладает явлением межфазного взаимодействия. Подобное взаимодействие должно быть учтено добавлением в уравнение соответствующих дифференциальных членов.

Описание межфазного взаимодействия математическим языком является классической проблемой при подобном рода моделировании. Решение данной проблемы путем использования принципа Гамильтона рассмотрено в научных работах [15–17]. В свою очередь использование этого принципа привносит в поставленную задачу ряд более мелких проблем, таких как негиперболичность системы уравнений и наличие уравнений, которые невозможно представить в дивергентной форме.

В связи с этим к формируемой физико-математической модели с целью ее усовершенствования необходимо предъявить ряд требований.

1. Гиперболичность системы уравнений, то есть с имеющимися начальными данными эта система уравнений должна быть однозначно разрешима в рассматриваемом пространстве.

2. Уравнение должно быть записано в дивергентной форме, то есть уравнение с дифференциальным оператором, которое способно отображать векторное поле на скалярное, определенное для каждой точки анализируемого пространства.

3. Согласованность полученной математической модели с законами термодинамики.

4. Количество фаз в формируемой математической модели должно быть произвольным.

Учитывая формулу (1) и обозначенные выше требования, можно использовать подход, описанный в трудах [18, 19], а именно термодинамические согласованные системы законов сохранения.

Подобная система будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{dU_i}{dt} = - \frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + Q(U_i, x_i), \quad (2)$$

где $Q(U_i, x_i)$ – показатели датчиков в определенном момент времени; $F_{i+\frac{1}{2}}, F_{i-\frac{1}{2}}$ – гетерогенность потоков.

При подобном подходе системы можно выразить пространственно, в виде призмы с гиперболической поверхностью.

$Q(U_i, x_i)$ может быть найдено экспериментальным путем, но $F_{i+\frac{1}{2}}, F_{i-\frac{1}{2}}$ могут быть найдены только с использованием методов для решения задач гиперболического типа. В работах [20–28] использован метод Рунге – Кутты/WENO, также и в некоторых трудах в сочетании с модификациями TVD-схем и WENO-схем.

Рассмотрим многофазный поток, состоящий из двух фаз ($N = 2$) [29]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho a_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho a_1 u_k}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k + \rho^2 E_\rho + \rho w_i E_{w_k})}{\partial x_k} &= 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial \rho c_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_1 u_k + \rho E_{w_k})}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho w_i}{\partial t} + \frac{\partial (w_k u_k + E_{c_1})}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где E – обобщенная внутренняя энергия многофазного потока, задающаяся как функция параметров течения.

Необходимо предусмотреть, что внутренняя энергия многофазного потока рассеивается (то есть осуществляет диссипацию). Модернизируем уравнение (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^k}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho a_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho a_j u^k}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial \rho u^i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^i u^k + \rho^2 E_p \delta_k^i + \rho w_n^i E_{w_n^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial \rho c_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_j u^k + \rho E_{w_j^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1; \\ \frac{\partial \rho w_j^k}{\partial t} + \frac{\partial (w_j^i u^l + E_{c_j})}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Ключевым свойством данной системы уравнений является возможность представления состояния фазного потока в любой момент времени. Поскольку для относительных скоростей многофазного потока в данной системе выполняется тождество

$$\frac{\partial w_j^k}{\partial x_n} - \frac{\partial w_n^j}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad k, n = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Продифференцировав его по x_k , мы получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_j^k}{\partial x_n} - \frac{\partial w_n^j}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (6)$$

И это означает, что при условии $t = 0$, оно выполняется в любой момент времени t . Также система удовлетворяет основному термодинамическому тождеству. Закон сохранения в системе уравнений (6), если суммировать все его уравнения:

$$\begin{aligned} q_w &= T = E_s, \quad q_j = E_{a_j} (j = 1, \dots, N-1), \\ q_0 &= E - S E_s - V E_V - c_j E_{c_j} - \frac{u_m u_n}{2}, \\ u^l (l = 1, 2, 3), \quad \theta_j &= E_{c_j} (j = 1, \dots, N-1), \quad J_k^j = \rho E_{w_j^k} (j = 1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (7)$$

если умножить (7) на $\rho u^l E_{w_j^k}$, то получим

$$\rho u^l E_{w_j^k} \left(\frac{\partial w_j^k}{\partial x_n} - \frac{\partial w_n^j}{\partial x_k} \right) = 0, \quad (8)$$

и, записав уравнение в дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho \left(E + \frac{u_m u_n}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^k \left(E + \frac{u_m u_n}{2} \right) + \Pi_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (9)$$

где Π_k – вектор потока энергии, который можно определить:

$$\Pi_k = u^k p + u^k \rho w_l^n E_{w_n^k} + \rho E_{c_j} E_{w_j^k}; \quad (10)$$

$$p = \rho^2 E_p. \quad (11)$$

Далее представим выражение (6) как производящий потенциал и переменные, что приведет систему в симметричную форму. Под производящими переменными мы понимаем такие переменные, которые наряду с консервативными вводятся относительно термодинамического преобразования Лежандра, чтобы выразить их относительно линейных функционалов некоего линейного пространства.

Для определения производящего потенциала L используем тождество

$$\begin{aligned} d\rho \left(E + \frac{u_m u_n}{2} \right) &= q_w d(\rho S) + q_j d(\rho a_j) + q_0 d\rho + u_i d(\rho u_i) + \theta_j d(\rho c_j) + J_k^j d w_k^j = \\ &= q_w dL_{q_w} + q_j dL_{q_j} + q_0 dL_{q_0} + u_i dL_{u_i} + \theta_j dL_{\theta_j} + J_k^j dL_{J_k^j} = \\ &= d(q_w L_{q_w} + q_j L_{q_j} + q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{J_k^j} - L). \end{aligned} \quad (12)$$

В результате получаем:

$$L_{q_w} = \rho S; \quad L_{q_j} = \rho a_j; \quad L_{q_0} = \rho; \quad L_{u_i} = \rho a_j; \quad L_{J_k^j} = w_k^j;$$

$$L = q_w L_{q_w} + q_j L_{q_j} + q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{J_k^j} - \rho \left(E + \frac{u_m u_n}{2} \right) = \rho^2 E_p + \rho w_j^k E_{w_j^k}. \quad (13)$$

Поскольку появилась возможность заменить уравнения системы на новые термины переменных и производных, сама система примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{qn}}{\partial t} + \frac{\partial u^k L_{qn}}{\partial x_k} &= 0; \quad n = w, 1, \dots, N - 1, 0; \\ \frac{\partial L_{u^l}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L_{u^l} + J_k^j L_{j_k} - \delta_k^l J_n^l L_{j_k})}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial L_{\theta_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L_{\theta_j} + J_k^j)}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial L_{j_k}^j}{\partial t} + \frac{\partial (u^n L_{j_k}^j + \theta_j)}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Ограничение запишется в виде

$$\frac{\partial L_{j_k}^j}{\partial x_n} - \frac{\partial L_{j_k}^j}{\partial x_m} = 0. \quad (15)$$

В этом случае закон сохранения энергии примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(q_w L_{q_w} + q_j L_{q_j} + q_o L_{q_o} + u_l L_{u_l} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{j_k} - L \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u^k \left(q_w L_{q_w} + q_j L_{q_j} + q_o L_{q_o} + u_l L_{u_l} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{j_k} \right) + J_k^j \theta_j \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда уравнение (14) представляем в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{qn}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L)_{qn}}{\partial x_k} &= 0; \quad n = w, 1, \dots, N - 1, 0; \\ \frac{\partial L_{u^l}}{\partial t} + \frac{\partial ((u^k L)_{u^l})}{\partial x_k} + L_{j_k}^j \frac{\partial J_k^j}{\partial x_k} - L_{j_n}^j \frac{\partial J_n^j}{\partial x_t} &= 0; \\ \frac{\partial L_{\theta_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L)_{\theta_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial J_k^j}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial L_{j_k}^j}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L)_{j_n}^j}{\partial x_k} + L_{j_n}^j \frac{\partial u^l}{\partial x_k} - L_{j_m}^j \frac{\partial u^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \theta_m}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, полученная система удовлетворяет ряд поставленных требований:

1. Система является гиперболической при $\rho \left(E + \frac{u_m u_n}{2} \right)$.
2. Все уравнения данной системы дивергентны.
3. Модель создана в соответствии с законами термодинамики.

Данная система является удобной для построения вычислительного алгоритма на основе методов Рунге – Кутты/WENO в сочетании с модификациями TVD-схем и WENO-схем, условно обозначим их как RK-TVD и RK-WENO. Интеграция по времени осуществляется с помощью SSPRK (Strong Stability Preserved Runge–Kutta) [30], для описания прохождения потоков через границы используется метод GFORCE [31].

RK-TVD и RK-WENO реконструкции полученного уравнения будут производиться с лимитером типа minmod [32]. Сечение трубопровода считается постоянной величиной. Представим усреднённую модель:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F(U)}{\partial x} = Q(U); \quad (18)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho a_1 \\ a_g \rho_g \\ a_l \rho_l \\ a_g \rho_g u_g + a_l \rho_l u_l \\ u_l - u_g \end{pmatrix}; \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho a_1 u \\ a_g \rho_g u_g \\ a_l \rho_l u_l \\ a_g \rho_g u_g u_g + a_l \rho_l u_l u_l \\ \frac{u_l^2}{2} - \frac{u_g^2}{2} + e_l + \frac{\rho_t}{\rho_l} - e_g - \frac{\rho_g}{\rho_g} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где U – вектор консервативных переменных; $F(U)$ – вектор потоков; $Q(U)$ – вектор правых частей уравнения.

После обработки уравнения (18) методом Рунге – Кутты мы видим:

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{F_{i+0.5} - F_{i-0.5}}{\Delta x} = \frac{\partial F(U)}{\partial x} = Q(x_i, U_i); \quad (20)$$

$$\Delta x = x_{i+0.5} - x_{i-0.5}. \quad (21)$$

В приведенных обозначениях:

$$U^0 = U^n; \quad U^i = U^{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t L(U^{i-1}), \quad i = 1, \dots, m - 1; \quad (22)$$

$$U^m = \sum_{k=0}^{m-2} a_{m,k} U^k + a_{m,m-1} (U^{m-1} + \frac{1}{2} \Delta t L(U^{m-1}));$$

$$U^{n+1} = U^m,$$

где $m = 2 \dots n$ (по количеству фаз); a – корректирующие коэффициенты; U – значения решения, полученные на n -м уровне и временных слоях; Δt – шаг по времени, определяющийся конструктивными особенностями датчика, измеряющего параметр процесса.

Для реконструкции RK-WENO преобразовываем (19) в характеристическую форму системы для возможности в последующем записи системы в виде диагональной матрицы. Реконструкция будет выглядеть

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (23)$$

где B – матрица линеаризованных коэффициентов.

Приведем ее к диагональной форме с условием, что

$$V = TU, \quad (24)$$

где V – вектор характеристик переменных; T – невырожденная матрица левой части системы.

Из этого следует:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (25)$$

где D – диагональная матрица с собственными числами.

Поскольку реконструкция методом RK-WENO аналогична для всех компонентов V , то это означает, что, описав одну скалярную величину, используя принцип подобности, можно описать все оставшиеся скалярные величины. На практике это означает возможность изменения параметров модели с отсутствием потери в точности.

Исследуя ячейку $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ как результат подобной реконструкции – $F_{i+0,5} = E(x_{i-0,5} + 0)$, $F_{i-0,5} = E(x_{i+0,5} - 0)$, вычислим индикаторы гладкости:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12}(V_i - 2V_{i+1} + V_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3V_i - 4V_{i+1} + V_{i+2})^2; \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(V_{i-1} - V_{i+1})^2; \\ \beta_0 &= \frac{13}{12}(V_{i-2} - 2V_{i-1} + V_i)^2 + \frac{1}{4}(V_{i-2} - 4V_{i-1} + 3V_{i+2})^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Функция индикаторов гладкости при данном разборе заключается в адекватности представления математического движения многофазного потока с учетом непрерывности производных.

Далее формируем нелинейные весовые коэффициенты:

$$w_k = \frac{a_k}{a_0 + a_1 + a_2}, \quad a_k = \frac{d_k}{(\beta_k + \varepsilon)^2}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (27)$$

Таким образом, найдя все значения V , вычисляем обратной заменой все значения U , так как они нужны для расчета реконструируемых потоков, по формуле

$$U = T^{-1}V. \quad (28)$$

Сравним разработанные физико-математические модели с натурным поведением жидкости в трубопроводе лабораторного стенда [33].

Была проведена серия тестовых расчетов и тестовых запусков многофазного потока. Для удобства анализа сведем показания измерительных приборов (датчик скорости, датчик давления) в двумерную подстановку по Сода [34] и выразим их для удобства сравнения с имитационной моделью в относительных единицах. По оси ординат – показание датчика в относительных единицах, по оси абсцисс – время опыта. На рис. 1–3 представлены графические зависимости натурного эксперимента (NM) (динамика изменения параметра многофазного потока за время проведения теста) с результатами расчетов физико-математической модели (PMM).

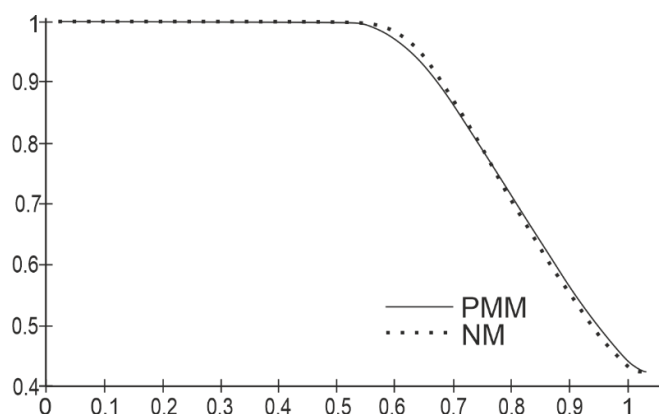


Рис. 1. Изменение плотности потока
Fig. 1. Change in flux density

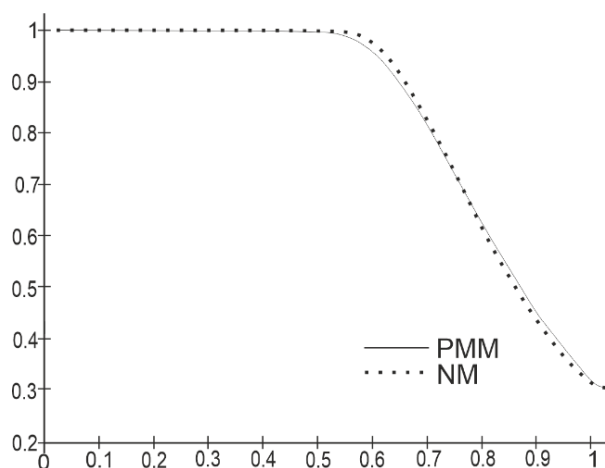


Рис. 2. Изменение давления на поток в различных участках системы лабораторного стенда
Fig. 2. Change in pressure on the flow in different parts of the laboratory bench system

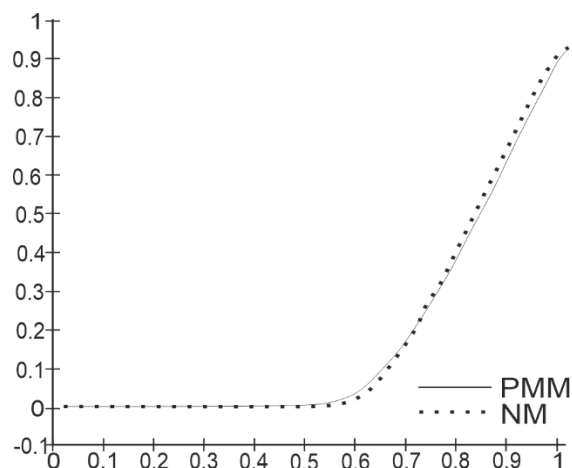


Рис. 3. Изменение скорости многофазного потока
Fig. 3. Changing the speed of multiphase flow

По результатам графического сопоставления данных можно видеть, что разработанная физико-математическая модель обладает высокой точностью имитации многофазного потока в лабораторном стенде.

Таким образом, рассмотрена возможность описания методики построения физико-математических моделей термодинамических процессов многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения с использованием метода Рунге – Кутты/ WENO.

Перспективы использования результатов исследования в промышленности и практическая ценность работы

Результаты расчетов, проведенных для построения физико-математической модели, позволяют говорить о наличии согласованности полученной математической модели с законами термодинамики. Значит, на практике возможно использование данного метода для построения математической модели, позволяющей исследовать термодинамические процессы многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения. Это позволяет исследовать влияние термодинамических процессов многофазных потоков наружных сетей теплоснабжения на саму систему теплоснабжения.

Рассматриваемая методика позволяет математически представить многофазный поток в виде

приходящего потока данных с однородным фоном, в перспективе удобным для детального рассмотрения, анализа и обработки с помощью информационных технологий.

В перспективе это означает возможность проектирования сверхсложных систем теплоснабжения (использующих многофазное рабочее тело в качестве теплоносителя) без потери точности при имитации. Данные разработки могут послужить ключевой технологией при разработке стратегии развития энергоснабжения и энергосбережения Арктических зон.

Выводы

Представлено нововведение в существующие TVD-схемы и WENO-схемы в виде описания представления математического движения многофазного потока с учетом непрерывности производных.

Это позволяет разрабатывать имитационные модели движения многофазной жидкости в трубопроводе с учетом параллельного изменения состава жидкостей и гладкости внутреннего диаметра трубопровода, что, в свою очередь, повышает точность имитации.

Разработанная в ходе данной работы методика может являться основой для создания плагина к библиотекам MATLAB Simulink и Simintech.

Список литературы

1. 4th Generation District Heating (4GDH): Integrating smart thermal grids into future sustainable energy systems / H. Lund, S. Werner, R. Wiltshire et al. // Energy. 2014. Vol. 68. P. 1–11. DOI: 10.1016/j.energy.2014.02.089
2. Петров А.М., Попов А.Н. Разработка метода математического моделирования термодинамических процессов однофазных потоков наружных сетей теплоснабжения // Строительство и техногенная безопасность. 2022. № 26 (78). С. 59–63.
3. Марченко Г.Н., Фархутдинов Р.Р. Эффективность существующих систем теплоснабжения и энергосбережения в системе ЖКХ // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2014. № 1-2. С. 116–124.

4. Петров А.М., Попов А.Н., Кузяков О.Н. Совершенствование архитектуры интеллектуальных систем управления // Автоматизация и информатизация ТЭК. 2023. № 4 (597). С. 15–22. DOI: 10.33285/2782-604X-2023-4(597)-15-22
5. Стенников В.А., Пеньковский А.В. Проблемы российского теплоснабжения и пути их решения // ЭКО. 2019. № 9 (543). С. 48–69. DOI: 10.30680/ЕСО0131-7652-2019-9-48-69
6. Батухтин А.Г. Система критериев оптимизации систем централизованного теплоснабжения // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: XV Междунар. науч.-практ. конф.: сб. ст. в 3 ч., Чита, 30 ноября – 02 декабря 2015 года. Чита: Забайкальский государственный университет, 2015. С. 7–11.
7. Семикашев В. В. Теплоснабжение в России: текущая ситуация и проблемы инвестиционного развития // ЭКО. – 2019. – № 9(543). – С. 23-47. – DOI: 10.30680/ЕСО0131-7652-2019-9-23-47
8. Семенов В.Г. Современное теплоснабжение в России системный подход и грамотное планирование // АВОК: Вентиляция, отопление, кондиционирование воздуха, теплоснабжение и строительная теплофизика. 2014. № 2. С. 4–10.
9. The status of 4th generation district heating: Research and results / H. Lund, P.A. Østergaard, M. Chang et al. // Energy. 2018. Vol. 164. P. 147–159. DOI: 10.1016/j.energy.2018.08.206
10. Петров А.М., Кочетков М.В., Попов А.Н. Концептуальные особенности развития цифровой энергетики в условиях Крайнего Севера (на примере Норильского промышленного района) // Инновации и инвестиции. 2022. № 4. С. 232–237. EDN SCKOHV.
11. Рахматулин Х.А. Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
12. Geurst J. Variational principles and two-fluid hydrodynamics of bubbly liquid/gas mixtures // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1986. Vol. 135, no. 2. P. 455–486.
13. Gavrilyuk S., Saurel R. Mathematical and Numerical Modeling of Two-phase Compressible Flows with Micro-inertia // Journal of Computational Physics. 2002. Vol. 175, no. 1. P. 326–360. DOI: 10.1006/jcph.2001.6951
14. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987.
15. Romensky E. Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics // Godunov methods. Springer, 2001. P. 745–761. DOI: 10.1007/978-1-4615-0663-8_75
16. Methodology of application of open-source platform Protégé in the measurement and computing systems development for diagnostics of heat supply networks / A. Petrov, A. Popov, A. Pushkarev, M. Chekardovsky // CEUR Workshop Proceedings. 2021.
17. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. М.: Научная книга, 1998. 267 с.
18. Qiu J., Shu C.-W. Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. Vol. 26, no. 3. P. 907–929. DOI: 10.1137/S1064827503425298
19. Романьков А.С., Роменский Е.И. Метод Рунге–Кутты/WENO для расчета уравнений волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 259–271.
20. Флегентова Е. И., Кулагина С.В. Решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты // Научному прогрессу – творчество молодых. 2019. № 1. С. 95–98.
21. Евстигнеев Н.М. О построении и свойствах WENO-схем пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого порядков. Часть 1. Построение и устойчивость // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8, № 5. С. 721–753.
22. Romenski E., Drikakis D., Toro E. Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow // Journal of Scientific Computing. 2010. Vol. 42, no. 1. P. 68–95. DOI: 10.1007/s10915-009-9316-y
23. Gottlieb S. On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multistep time discretizations // Journal of Scientific Computing. 2005. Vol. 25, no. 1. P. 105–128. DOI: 10.1007/BF02728985
24. Butcher J.C. Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes // Journal of the Australian Mathematical Society. 1963. Vol. 3. P. 185–201. DOI: 10.1017/S1446788700027932
25. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations, v. II, Stiff and differential-algebraic problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996. DOI: 10.1007/978-3-662-09947-6
26. Cash J.R., Singhal A. Mono-implicit Runge-Kutta formulae for the numerical integration of stiff differential systems // IMA Journal of Numerical Analysis. 1982. Vol. 2 (2). P. 211–227. DOI: 10.1093/imanum/2.2.211
27. Verner J.H. Numerically optimal Runge-Kutta pairs with interpolants // Numerical Algorithms. 2010. Vol. 53. P. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3
28. Jackiewicz Z. General Linear Methods for Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 2009. DOI: 10.1002/978-0-470-52216-5
29. Toro E. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, 2009. DOI: 10.1007/b79761

30. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws: Tech. Rep. NASA CR-97-206253 ICASE Report No. 97-65: Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1997. DOI: 10.1007/BFb0096355
31. Сафронов А.В. Кинетические интерпретации численных схем для уравнений газодинамики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2009. Т. 8. С. 7.
32. Белозеров А.А. Консервативная модель и численные методы для течений многофазных сжимаемых сред: специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2016. 22 с.
33. Petrov A., Popov A., Molotok A. Development of a laboratory installation of a digital measuring system for visualization of internal pipeline processes // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1614. P. 012036. DOI: 10.1088/1742-6596/1614/1/012036
34. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. Vol. 27. P. 1–31. DOI: 10.1016/0021-9991(78)90023-2

References

1. Lund H., Werner S., Wiltshire R., Svendsen S., Thorsen J.E., Hvelplund F., Mathiesen B.V. 4th Generation District Heating (4GDH): Integrating smart thermal grids into future sustainable energy systems. *Energy*. 2014;68:1–11. DOI: 10.1016/j.energy.2014.02.089
2. Petrov A.M., Popov A.N. Development of a method for mathematical modeling of thermodynamic processes of single-phase flows of external heat supply networks. *Construction and industrial safety*. 2022;26(78):59–63. (In Russ.)
3. Marchenko G.N., Farkhutdinov R.R. [Efficiency of existing heat supply and energy saving systems in the housing and communal services system]. *Proceedings of higher educational institutions. Energy sector problems*. 2014;(1-2):116–124. (In Russ.)
4. Petrov A.M., Popov A.N. Improvement of intelligent control systems architecture. *Automation and Informatization of the fuel and energy complex*. 2023; 4(597):15–22. (In Russ.)
5. Stennikov, V.A., Penkovskii, A.V. Problems of the Russian Heat Supply and Ways of Solving them. *ECO*. 2019;9(543):48–69. (In Russ.). DOI: 10.30680/ECO0131-7652-2019-9-48-69
6. Batukhtin A.G. [System of criteria for optimization of centralized heat supply systems]. In: *XV Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya: sbornik statey v 3 chastyakh* [XV International Scientific and Practical Conference: collection of articles in 3 parts]. Chita; 2015. P. 7–11. (In Russ.)
7. Semikashov V.V. Heat Supply in Russia: Current State and Problems of Investment Development. *EKO*. 2019;9(543):23–47. (In Russ.). DOI: 10.30680/ECO0131-7652-2019-9-23-47
8. Semenov V.G. [Modern Heat Supply in Russia: Systematic Approach and Proper Planning]. *AVOK: Ventilyatsiya, otoplenie, konditsionirovanie vozdukh, teplosnabzhenie i stroitel'naya teplofizika* [ABOK: Ventilation, heating, air conditioning, heat supply and building thermophysics]. 2014;(2):4–10. (In Russ.)
9. Lund H., Østergaard P.A., Chang M. et al. The status of 4th generation district heating: Research and results. *Energy*. 2018;164:147–159. DOI: 10.1016/j.energy.2018.08.206
10. Petrov A.M., Kochetkov M.V., Popov A.N. Conceptual features of the development of digital energy in the conditions of the Far North (by the example of the Norilsky industrial district). *Innovation & Investment*. 2022;(4):232–237. (In Russ.)
11. Rakhmatulin Kh.A. [Fundamentals of gas dynamics of interpenetrating motions of continuous media]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1956;20(2):184–195. (In Russ.)
12. Geurst J. Variational principles and two-fluid hydrodynamics of bubbly liquid/gas mixtures. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1986;135(2):455–486.
13. Gavriilyuk S., Saurel R. Mathematical and Numerical Modeling of Two-phase Compressible Flows with Micro-inertia. *Journal of Computational Physics*. 2002;175(1):326–360. DOI: 10.1006/jcph.2001.6951
14. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred: v 2 ch.* [Dynamics of multiphase media: in 2 parts]. Moscow: Nauka; 1987. (In Russ.)
15. Romensky E. Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics. In: *Godunov methods*. Springer; 2001. P. 745–761. DOI: 10.1007/978-1-4615-0663-8_75
16. Petrov A., Popov A., Pushkarev A., Chekardovsky M. Methodology of application of open-source platform Protégé in the measurement and computing systems development for diagnostics of heat supply networks. *CEUR Workshop Proceedings*. 2021.
17. Godunov S.K., Romenskiy E.I. *Elementy mekhaniki sploshnykh sred i zakony sokhraneniya* [Elements of continuum mechanics and conservation laws]. Moscow: Nauchnaya kniga; 1998. 267 p. (In Russ.)
18. Qiu J., Shu C.-W. Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2005;26(3):907–929. DOI: 10.1137/S1064827503425298

19. Roman'kov A.S., Romenskiy E.I. [The Runge–Kutta/WENO method for calculating the equations of small amplitude waves in a saturated elastic porous medium]. *Siberian journal of numerical mathematics*. 2014;17(3):259–271. (In Russ.)
20. Flegentova E.I., Kulagina S.V. [Solving systems of differential equations using the Runge-Kutta method]. *Nauchnomu progressu – tvorchestvo molodykh* [Scientific progress – creativity of the young]. 2019;1:95–98. (In Russ.)
21. Evstigneev N.M. On the construction and properties of WENO schemes order five, seven, nine, eleven and thirteen. Part 1. Construction and stability. *Computer research and modeling*. 2016;8(5):721–753. (In Russ.)
22. Romenski E., Drikakis D., Toro E. Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow. *Journal of Scientific Computing*. 2010;42(1):68–95. DOI: 10.1007/s10915-009-9316-y
23. Gottlieb S. On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multistep time discretizations. *Journal of Scientific Computing*. 2005;25(1):105–128. DOI: 10.1007/BF02728985
24. Butcher J.C. Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 1963;3:185–201. DOI: 10.1017/S1446788700027932
25. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations, v. II, Stiff and differential-algebraic problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996. zbMATH: an:0859.65 MathSciNet: 1439506. DOI: 10.1007/978-3-662-09947-6
26. Cash J.R., Singhal A. Mono-implicit Runge-Kutta formulae for the numerical integration of stiff differential systems. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 1982;2(2):211–227. DOI: 10.1093/imanum/2.2.211
27. Verner J.H. Numerically optimal Runge-Kutta pairs with interpolants. *Numerical Algorithms*. 2010;53:383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3
28. Jackiewicz Z. *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 2009. DOI: 10.1002/978-0-470-52216-5
29. Toro E. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer; 2009. DOI: 10.1007/b79761
30. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws: Tech. Rep. NASA CR-97-206253 ICASE Report No. 97-65: Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1997. DOI: 10.1007/BFb0096355
31. Safronov A.V. [Kinetic interpretations of numerical schemes for gas dynamics equations]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike* [Physico-chemical kinetics in gas dynamics]. 2009;8:7. (In Russ.)
32. Belozero A.A. *Konservativnaya model' i chislennyye metody dlya techeniy mnogofaznykh szhimaemykh sred: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Conservative model and numerical methods for flows of multiphase compressible media. Abstract of cand. sci. diss.]. Novosibirsk; 2016. 22 p. (In Russ.)
33. Petrov A., Popov A., Molotok A. Development of a laboratory installation of a digital measuring system for visualization of internal pipeline processes. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1614:012036. DOI: 10.1088/1742-6596/1614/1/012036
34. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 1978;27:1–31. DOI: 10.1016/0021-9991(78)90023-2

Информация об авторах

Петров Алексей Михайлович, канд. техн. наук, доц., заведующий кафедрой электроэнергетики и автоматики, Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского, Норильск, Россия; darker2012@yandex.ru.

Попов Антон Николаевич, старший преподаватель Академического департамента, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия; старший преподаватель, Государственный аграрный университет Северного Зауралья, Тюмень, Россия; 264241@mail.ru.

Information about the authors

Aleksey M. Petrov, Cand. Sci. (Eng.), Ass. Prof., Head of the Department of Power Engineering and Automation, Fedorovsky Polar State University, Norilsk, Russia; darker2012@yandex.ru.

Anton N. Popov, Senior Lecturer of the Academic Department, University of Tyumen, Tyumen, Russia; Senior Lecturer, Northern Trans-Ural State Agricultural University, Tyumen, Russia; 264241@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 01.10.2023; одобрена после рецензирования 08.12.2023; принята к публикации 08.12.2023.

The article was submitted 01.10.2023; approved after review 08.12.2023; accepted for publication 08.12.2023.